COCATÉGORIE ET NILPOTENCE

Mohammed El Haouari

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliqées
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France
email: haouari@math.univ-lille1.fr

Abstract. The Lusternik-Schnirelmann category of a topological space X, denoted $catX$, is the least integer n such that X can be covered by $n+1$ open sets, each of them contractible in X. This is a homotopical invariant. We give dualisation of this invariant in the sense of Eckmann-Hilton and we show that the nilpotent class of the space $[G, X]$ is a lower bound.

Résumé. La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace X, notée $catX$, est le plus petit entier naturel n tel que X soit recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans X. C'est un invariant topologique. Des définitions équivalentes ont été données dans la littérature, en particulier au sens de Whitehead et de Ganea. De même plusieurs résultats donnent le lien entre la catégorie de Lusternik-Schnirelmann et d'autres invariants topologiques: Invariant de Toomer, nilpotence de la cohomologie. Nous donnons une dualisation de cet invariant au sens d'Eckmann-Hilton et nous le minorons par la classe de nilpotence de l'espace $[G, X]$ des classes d'homotopies d'applications continues de G dan X.

Mots clés: L.S.catégorie, co-H-espace.

Mathematical Subject Classification: 55P30, 55P50.

1. Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à des invariants de type d'homotopie: L.S. cattégorie et L.S. cocatégorie des espaces topologiques simplement connexes. Rappelons que la L.S.catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace X, notée $catX$, est le plus petit entier naturel n tel que X soit recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans X. T. Ganea et G.W. Whitehead ont donné d'autres descriptions de cet invariant en termes de sections de fibrations $g_n : G_n(X) \to X$ appelées fibrations de Ganea et relèvements de la diagonale $\Delta : X \to X^{n+1}$ via des applications $T^{n+1} \to X^{n+1}$ où T^n est le $n^{\text{ième}}$ bouquet garni de X.

Une dualisation des deux approches Ganea et Whitehead donnent naissance à deux invariants topologiques: les cocatégories de Ganea et Whitehead. L'égalité entre ces deux invariants n'est pas établie et reste un problème ouvert. Ce qui rend l'étude de ces invariants difficiles.

Notre contribution consiste à établir une liaison entre les cocatégories de Ganea et Whitehead et la classe de nilpotence de l'espace $[G, X]$ des classes d'homotopies d'applications continues de G dans X.

Dans la suite nous donnons les définitions des cocatégories au sens de Ganea et Whitehead, et nous démontrons les deux théorèmes suivants:

Théorème 4 *Soit X un espace 1-connexe et G un co-H-espace. Si la cocatégorie de Whitehead $cocat_W X \leq n$ alors l'espace $[G, X]$ des classes d'homotopie d'applications continues de G dans X est nilpotent de classe n.*

Théorème 7 *Soit X un espace 1-connexe et G un co-H-espace. Si la cocatégorie de Ganea $cocat_G X \leq n$ alors l'espace $[G, X]$ des classes d'homotopie d'applications continues de G dans X est nilpotent de classe n.*

1) La Cocatégorie $\mathbf{cocat_W}$

Soit X un espace topologique 1-connexe. D'abord on définit, par récurrence, des espaces $W_n X,\ n \geq 0$ et des applications continues $w_n(X) : \bigvee^{n+1} X \to W_n X$:

$w_0(X) : X \to W_0 X = *$ l'application triviale et $w_n(X) : \bigvee^{n+1} X \to W_n X$ est le cojoint des applications évidentes $\bigvee^{n+1} X \simeq (\bigvee^{n} X) \bigvee X \to \bigvee^{n} X \bigvee *$ et $\bigvee^{n+1} X \simeq (\bigvee^{n} X) \bigvee X \to W_{n-1} X \bigvee X$ (cette construction est fonctorielle).

Rappelons que le cojoint de 2 applications $A \to B$ et $A \to C$ est le produit fibré homotopique (homotopy pullback) de $B \to S$ et $C \to S$, où S est la somme amalgamée homotopique (homotopy pushout) de $A \to B$ et $A \to C$.

Définition 1 *$cocat_W X \leq n$* si et seulement si l'application $\nabla : \bigvee^{n+1} X \to X$ se factorise, à homotopie prés, à travers $w_n(X) : \bigvee^{n+1} X \to W_n X$, c'est à dire il existe une application continue $f : W_n X \to X$ telle que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \bigvee^{n+1} X \arrow[r, "\nabla_{n+1}"] \arrow[d, "w_n(X)"'] & X \\ W_n X \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

soit homotopiquement commutatif.

2) La Cocatégorie $\mathbf{cocat_G}$

Soit X un espace topologique 1-connexe. On définit d'abord par récurrence, pour tout $n \geq 0$, des espaces $G'_n X$ et des applications continues $g_n(X) : X \to G'_n X$:

$g_0(X) : X \to G'_0 X = *$ est l'application triviale et $g_n(X) : X \to G'_n X$ par le cojoint de $g_{n-1}(X) : X \to G'_{n-1} X$ et $g_0(X) : X \to *$.

Les cofibrations de Ganea sont: $X \to G'_n X \to C_n(X)$ où $C_n(X)$ est la cofibre de $g_n(X) : X \to G'_n X$.

Notons que $G'_n X$ est la fibre homotopique de $G'_{n-1} X \to C_{n-1}(X)$

Définition 2 *$cocat_G X \leq n$ si et seulement si l'application $g_n : X \to G'_n X$ admet une rétraction r_n.*

Proposition 3

1) *Il existe un diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} \bigvee^{n+1} X & \xrightarrow{w_n(X)} & W_n X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \nabla_{n+1}} & & \Big\downarrow \\ X & \xrightarrow{g_n(X)} & G'_n(X) \end{array}$$

qui commute à homotopie près.

2) *$cocat_W X \leq cocat_G X$*

Preuve.

1) C'est une dualisation immédiate du Théorème 5.5 dans [3].

2) L'inégalité suit à partir des définitions. ∎

Théorème 4 *Soit X un espace 1-connexe et G un co-H-groupe. Si $cocat_W X \leq n$ alors l'espace $[G, X]$ des classes d'homotopie d'applications continues de G dans X est nilpotent de classe n.*

a) Définition du commutateur $[,]_\# : G \to G \bigvee G$:

Posons $\mu : G \to G \bigvee G$ la loi du co-H-groupe G, $j : G \to G$ l'inverse et $p_k : G \bigvee G \to G, k = 1, 2$ les restrictions des projections p_k de $G \times G$ sur G.

Posons $\nabla_G : G \bigvee G \to G$ l'application qui envoie $(x, *)$ et $(*, x)$ sur x.

On a $p_1 \circ \mu \simeq p_2 \circ \mu \simeq 1_G$ et les applications $\nabla_G \circ (j \bigvee 1_G) \circ \mu$ et $\nabla_G \circ (1_G \bigvee j) \circ \mu$ sont homotopiquement triviales.

On définit alors $[,]_\#$ par la composée $\nabla_{G \bigvee G}(\mu \bigvee T\mu j)\mu$, où $T : G \bigvee G \to G \bigvee G$ est la restriction de l'application de transposition $T : G \times G \to G \times G$ définie par $T(x, y) = (y, x)$.

Lemme 5 *Si k est l'inclusion de $G\bigvee G$ dans $G\times G$ alors $k\circ[,]_\#$ est homotopiquement triviale.*

Preuve. D'après la propriété universelle du produit fibré homotopique, il suffit de montrer que $p_k\circ[,]_\#$ est triviale pour $k=1,2$.

Il est facile de voir que

$$p_k\nabla_{G\vee G}(f\bigvee g)=\nabla_G(p_kf\bigvee p_kg),\quad \forall f,g:G\to G\bigvee G.$$

Ainsi:

$$p_k\circ[,]_\#=p_k\nabla_{G\vee G}(\mu\bigvee T\mu j)\mu=\nabla_G(p_k\mu\bigvee p_kT\mu j)\mu=\nabla_G(1_G\bigvee j)\mu\simeq\tilde e,$$

où $\tilde e$ est l'application triviale. ∎

b) Définition des $\Phi_n:G\to\bigvee^n G$:

On définit $\Phi_n:G\to\bigvee^n G$ par induction,

$$\Phi_1=id_G,\quad \Phi_2=[,]_\#\text{ et }\Phi_{n+1}=(1_G\bigvee\Phi_n)\circ\Phi_2.$$

Proposition 6 *Soit $w_n(G):\bigvee^{n+1}G\to W_nG$. On a $w_n(G)\circ\Phi_{n+1}\simeq *$.*

Preuve. Par récurrence:

Le cas $n=0$ est trivial.

Le cas $n=1$ est donné par le Lemme 5.

Supposons $w_{n-1}(G)\circ\Phi_n\simeq *$ par une homotopie H.

On peut supposer que $w_{n-1}(G):\bigvee^n G\to W_{n-1}G$ une fibration et de là il existe une application continue $\Psi':G\times I\to\bigvee^n G$ telle $\Psi'(.,0)=\Phi_n$ et $w_{n-1}\circ\Psi'(.,1)=H(.,1)=*$

Soit alors $\Psi:(G\bigvee G)\times I\to G\bigvee\bigvee^n G$ par
$\Psi((x,*),t)=(x,*)$ et $\Psi((*,x),t)=(*,\Psi'(x,t))$.
On a alors $\Psi_0=1\bigvee\Phi_n$ et posons $F=\Psi_1$.
On a: $\forall x\in G$: $F(x,*)=(x,*)$ et $F(*,x)=(*,\Psi'(x,1))=(*,\Psi'_1(x))$.
En considérant le produit fibré homotopique:

$$\begin{tikzcd}
W_nG \arrow[r] \arrow[d, "pfh"] & *\bigvee\bigvee^n G \arrow[d, "*\bigvee w_{n-1}(G)"] \\
G\bigvee W_{n-1}G \arrow[r, "*\bigvee 1_G"] & *\bigvee W_{n-1}G
\end{tikzcd}$$

Les applications $(*,\Psi'_1) : G\times G \to *\bigvee \bigvee^{n} G$ et $(1,*) : G\times G \to G\bigvee W_{n-1}G$ induisent une application $\tilde{\Psi}_n : G\times G \to W_nG$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & *\bigvee \bigvee^{n} G \arrow[dr, "*\bigvee w_{n-1}"] & \\
G\times G \arrow[urr, "(*,\Psi'_1)"] \arrow[r, dotted, "\tilde{\Psi}_n"] \arrow[drr, "(1,*)"'] & W_nG \arrow[ur] \arrow[dr] & h.p.b. & *\bigvee W_{n-1}G \\
 & & G\bigvee W_{n-1}G \arrow[ur, "*\bigvee 1_G"'] &
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie près.

De même, les restrictions de $(*,\Psi'_1)$ et $(1,*)$ à $G\bigvee G$ déterminent l' application $w_n\circ F : G\bigvee G \to W_nG$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & *\bigvee \bigvee^{n} G \arrow[dr, "*\bigvee w_{n-1}"] & \\
G\bigvee G \arrow[urr, "(*,\Psi'_1)"] \arrow[r, dotted, "w_n\circ F"] \arrow[drr, "(1,*)"'] & W_nG \arrow[ur] \arrow[dr] & h.p.b. & *\bigvee W_{n-1} \\
 & & G\bigvee W_{n-1} \arrow[ur, "*\bigvee 1_G"'] &
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie près.

Ainsi par unicité, $w_n\circ F$ se factorise à travers $\tilde{\Psi}_n$ via l'inclusion

$$k : G\bigvee G \to G\times G.$$

D'où

$$w_n\circ\Phi_{n+1} \simeq w_n\circ(1_G\bigvee\Phi_n)\circ\Phi_2 \simeq w_n\circ F\circ\Phi_2 \simeq \tilde{\Psi}_n\circ k\circ\Phi_2 \simeq *$$

(d'aprés le Lemme 5). ∎

Démonstration du théorème. Soit $\Gamma = [G,X]$.

On pose $Z_1(\Gamma) = \Gamma$ et $Z_{i+1}(\Gamma) = [\Gamma, Z_i(\Gamma)]$ pour $i\geq 1$.

Γ est nilpotent si et seulement s'il existe $c\geq 1$ tel que $Z_{c+1}(\Gamma) = 0$.

On pose, par induction, pour tout $\{f_i\}_i$ dans Γ:

$$[f_1, f_2, ..., f_{q+1}] = [f_1[f_2[...f_{q+1}]]].$$

On a: Γ est nilpotent de classe $\leq n$ si et seulement si tous les commutateurs $[f_1, f_2, ..., f_{n+1}]$ sont nuls.

Supposons que $cocat_W X \leq n$ et montrons que ces commutateurs sont nuls: Soit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_{n+1}"] & \bigvee\limits^{n+1} G \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "w_n G"'] & \bigvee\limits^{n+1} X \arrow[r, "\nabla_{n+1}"] \arrow[d, "w_n(X)"] & X \\ & W_n G \arrow[r, "\tilde{\varphi}_n"] & W_n X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

où $\varphi_n = f_1 \bigvee f_2 \bigvee ... \bigvee f_{n+1}$, $\tilde{\varphi}_n$ est l'application induite par fonctorialité et f est la factorisation.

Le commutateur $[f_1[f_2[...f_{n+1}]]]$ est représenté par:

$$G \xrightarrow{\Phi_{n+1}} \bigvee^{n+1} G \xrightarrow{\varphi_n} \bigvee^{n+1} X \xrightarrow{\nabla_{n+1}} X$$

Ainsi

$$\nabla_{n+1} \circ \varphi_n \circ \Phi_{n+1} = f w_n(X) \varphi_n \Phi_{n+1} = f \tilde{\varphi}_n w_n(G) \Phi_{n+1} = * \qquad \blacksquare$$

Théorème 7 *Soit X un espace 1-connexe et G un co-H-groupe. Si $cocat_G X \leq n$ alors l'espace $[G, X]$ des classes d'homotopie d'applications continues de G dans X est nilpotent de classe n.*

Avant de démontrer ce théorème, nous allons donner quelques résultats généraux:

Soit une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$. Il existe une opération d'holonomie $h : \Omega B \times F \to F$ appelée holonomie de la fibration [3], [4]. Elle est définie à homotopie près.

L'application h induit une action de $[G, \Omega B]$ sur $[G, F]$. On la notera "$\cdot$".

D'autre part, considérons l'application $q_* : [G, \Omega B] \to [G, F]$ induite par l'application q dans la suite

$$\Omega B \xrightarrow{q} F \longrightarrow E \longrightarrow B$$

L'application q est appelée l'application connectante de la fibration et est la composée de $\Omega B \to \Omega B \times F$ avec h.

En notant par $+$ les opérations du groupe dans $[G, \Omega B]$ et $[G, F]$, il est facile de voir que: $\forall a, b$ dans $[G, \Omega B]$ et $\forall x, y$ dans $[G, F]$ on a:

$$(a + b).(x + y) = (a.x) + (b.y). \tag{1}$$

Finalement, si on note par $\tilde{e}$ la classe d'homotopie de l'application constante. En appliquant l'égalité (1) à $b = \tilde{e}$ et $x = \tilde{e}$ et à $a = \tilde{e}$ et $y = \tilde{e}$, on obtient $a.y = q_*(a) + y$ et $a.y = y + q_*(a)$ et ainsi l'image de q_* est dans le centre de $[G, F]$.

Démonstration du théorème. Montrons d'abord que nil$[G, G'_k(X)] \leq k$.

Par induction sur $k = cocat_G X$:

Si $k = 0$, nil$[G, G'_0(X)] \leq 0$ car $G'_0(X) = *$.

Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $k-1$.

Considérons la suite

$$\Omega C_{k-1}(X) \xrightarrow{\quad q \quad} F'_k(X) \xrightarrow{\qquad} G'_{k-1}(X) \xrightarrow{\qquad} C_{k-1}(X)$$

où $F'_k(X)$ est la fibre homotopique de $G'_{k-1}(X) \to C_{k-1}(X)$.

On déduit la suite exacte de groupes:

$$[G, \Omega C_{k-1}(X)] \xrightarrow{q_*} [G, F'_k(X)] \longrightarrow [G, G'_{k-1}(X)] \longrightarrow [G, C_{k-1}(X)]$$

D'après ce qui précède, l'image de q_* est dans le centre de $[G, F'_k(X)]$.

Comme, par hypothèse,

$$\text{nil } [G, G'_{k-1}(X)] \leq k-1,$$

il suit que

$$\text{nil } [G, G'_k(X)] = \text{nil } [G, F'_k(X)] \leq k.$$

Maintenant, supposons que $cocat_G X \leq n$. Il existe alors une rétraction $r_n : G'_n(X) \to X$ de l'application $g_n : X \to G'_n(X)$ et par suite l'application $(r_n)_* : [G, G'_n X] \to [G, X]$ est surjective.

Finalement, nil$[G, G'_k(X)] \leq n$ achève la démonstration du théorème. ∎

Remarque. Le premier théorème est une dualisation de celui de Whitehead dans [11], et le deuxième est une dualisation d'un résultat d'Arkowitz dans [1]. Bien que le Théorème 4 entraîne le Théorème 7, nous avons trouvé qu'il est intéressant de donner deux démonstrations complétement différentes.

Référence

[1] Arkowitz, M., *On Whiteheads's inequality, nil$[X, G] \leq$cat X* , Int. J. Math. Math. Sci., 25 (2001), 311-313.

[2] Arkowitz, M and Lupton, G., *Homotopy actions, Cyclic maps and their duals*, Homology, Homotopy and Applications, vol. 7 (1), 2005, 169-184.

[3] Doeraene,J.-P., *Homotopy pull backs, homotopy push outs and joins*, Bull. Belg. Math. Soc., 5 (1998), 15-37.

[4] Félix, Y., *La Dichotomie Elliptique-Hyperbolique en Homotopie Rationnelle,* Astérisque, 176 (1989).

[5] Ganea, T., *Lusternik-Schnirelmann category and cocategory*, Proc. London Math. Soc., 10 (1960), 623-639.

[6] Ganea, T., *Fibrations and cocategory*, Comment. Math. Helvitici., 35 (1961), 15-24.

[7] Ganea, T., *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois J. Math., 11 (1967), 417-467.

[8] Hopkins, M.J., *Formulations of cocategory and the itered suspension,* In Astérisque (Homotopie algébrique et algèbre locale), 113-114 (1984), 238-246.

[9] Hovey, M., *Lusternik-Schnirelmann cocategory*, Illinois J. Math., 37 (1993), 224-239.

[10] Murillo, A. and Virual, A., *Lusternik-Schnirelmann cocategory: A Whitehead dual approch,* 323-348, in [Cohomological Methods In Homotopy Theory by J. Aguade, C. Broto and C. Casacubierta, Birkhauser Verlag 2001].

[11] Whitehead, G.W., *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag 1978.

Accepted: 28.04.2009