SUR LES ALGEBRES DE LIE D'UN SYSTEME DE CHAMPS DE VECTEURS PERMUTABLES

H.S.G. Ravelonirina
P. Randriambololondrantomalala
M. Anona

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
Université d'Antananarivo
Antananarivo 101, BP 906
Madagascar
e-mail: rhsammy@yahoo.fr
princypcpc@yahoo.fr
mfanona@yahoo.fr

Résumé. Soient M une variété $C^\infty-$ différentiable et S un système de q $C^\infty-$ champs de vecteurs qui commutent deux à deux. Ce système définit une structure de feuilletage généralisé $\mathcal{F}$ sur M. L'algèbre de Lie A_S des champs de vecteurs de M qui commutent avec S est à la fois un module sur l'anneau des $C^\infty-$ fonctions qui sont constantes sur les feuilles de $\mathcal{F}$ et une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux au feuilletage. On détermine toutes les dérivations de l'algèbre de Lie A_S.
Mots clés: algèbre de Lie, champ de vecteurs permutables, feuilletage généralisé, cohomologie locale de Chevalley-Eilenberg, cohomologie de de Rham.

Abstract. Let be M a $C^\infty-$ differentiable manifold and S a system of q $C^\infty-$ vector fields which commute mutually. This system defines a generalized foliation $\mathcal{F}$ on M. The Lie algebra A_S of vector fields in M which commute with S is both a module over the ring of $C^\infty-$ functions that are constant on the leaves of $\mathcal{F}$ and a sub-Lie algebra of the foliation preserving vector fields. We determine all derivations of the Lie algebra A_S.

Keywords: Lie Algebra, commuting vector fields, generalized foliation, local cohomology of Chevalley-Eilenberg, cohomology of de Rham.

AMS Subject Classification: Primary 17B66; 17B56; Secondary 53C12; 47B47.

1. Introduction

Soient M une variété différentiable paracompacte de classe C^∞ et $\chi(\mathrm{M})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de M. Dans son article [8], Takens a montré que toute dérivation de l'algèbre de Lie $\chi(\mathrm{M})$ est une dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs de M. Dans le cas où l'algèbre de Lie est une sous-algèbre de Lie attachée à un feuilletage régulier sur M, Lichnérowicz cf. [3] a prouvé aussi des résultats analogues. Nous avons étendu ces résultats dans le cas d'une distribution involutive non régulière cf. [5], où l'anneau de base contient toutes les fonctions de classe C^∞ de la variété. Dans [6], nous avons abordé le même problème sur les algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux $\mathfrak{P}$ sur $\mathbb{R}^n$ qui contiennent tous les champs constants et le champ d'Euler. Nous avons prouvé que toute dérivation de $\mathfrak{P}$ est une dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs polynomiaux de $\mathbb{R}^n$. Dans ce papier, nous étudions une sous-algèbre de Lie de $\chi(\mathrm{M})$ dont l'anneau des fonctions de classe C^∞ du module sous-jacent est tronqué. Plus précisement, M est une variété différentiable de dimension $m+q$ et S un système de $q \geq 1$ champs de vecteurs qui commutent deux à deux, et de rang p avec $0 \leq p(x) \leq q$, pour tout $x \in \mathrm{M}$. Il existe une structure de feuilletage généralisé $\mathfrak{F}$ définie par le système S cf. [1]. On note $L_{\mathfrak{F}}$ l'algèbre de Lie des champs des automorphismes infinitésimaux de $\mathfrak{F}$ et, A_S l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de M qui commutent avec S. Toutes les feuilles sont supposées régulières. L'algèbre de Lie A_S se décompose en une somme semi-directe d'algèbres de Lie A_S^1 et A_S^2, où A_S^1 (resp. A_S^2) est un module (resp. l'algèbre de Lie engendrée par S) sur l'anneau des fonctions constantes aux feuilles. Ainsi A_S est une sous-algèbre de Lie de $L_{\mathfrak{F}}$. De plus, l'algèbre de Lie A_S^2 est un idéal caractéristique de A_S. Par ailleurs, on donne une condition nécéssaire et suffisante pour que toute dérivation de A_S soit locale; de même pour que l'idéal dérivé de A_S coïncide à A_S. Ainsi, les caractéristiques d'une dérivation non locale de A_S sont obtenues. En étudiant la dérivation locale de A_S dans l'idéal caractéristique A_S^2, on peut déterminer toutes les dérivations locales non intérieures de A_S. Par suite, en utilisant l'algèbre quotient de A_S par A_S^2 et un résultat de [5], on peut décomposer toute dérivation locale de A_S en une somme de dérivation intérieure de A_S et de dérivation locale non intérieure trouvée auparavant. Dans le cas où le rang p de S est constant supérieur ou égal à 1, le premier espace de cohomologie locale de Chevalley-Eilenberg de A_S est isomorphe à $(\mathrm{H}_R^1(\mathrm{B}) \times \mathbb{R})^p \times \mathbb{R}^{p^2}$, où $\mathrm{H}_R^1(\mathrm{B})$ désigne le premier espace de cohomologie de de Rham sur les formes basiques au feuilletage de M. Si le système S est réduit à un champ de Liouville, on retrouve par une méthode différente un résultat de Lecomte dans [4].

2. Préliminaires

Soit M une variété réelle $C^\infty-$ différentiable paracompacte de dimension $m+q$ où $m, q \geq 1$. Tous les objets étudiés sont supposés de classe C^∞. On désigne par $F(\mathrm{M})$ l'anneau des fonctions C^∞ sur M, $\chi(\mathrm{M})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M, S un système $\{X_1, \ldots, X_q\}$ de rang p de champs de vecteurs, avec $0 \leq p(x) \leq q$ pour tout $x \in \mathrm{M}$. Les éléments de S vérifient $[X_i, X_j] = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, q\}$. On considère l'algèbre de Lie A_S des champs de vecteurs X de M tels que $[X, X_i] = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$.

On peut déduire du système S un champ de plans P, qui à tout $x \in \mathrm{M}$ correspond le sous-espace vectoriel engendré par $X_1(x), \ldots, X_q(x)$ de $T_x(\mathrm{M})$. P est un champ de plans de classe C^∞ de système générateur S. Tout champ de vecteurs $X = g^j X_j$ de P avec $g^j \in F(\mathrm{M})$, vérifie pour tout i

$$[X, X_i] = -\left(X_i(g^j)\right) X_j$$

c'est-à-dire, P est invariant par tout champ de vecteurs de P. D'après le théorème de Sussmann cf. [7], il existe un feuilletage généralisé $\mathfrak{F}$ sur M dont la feuille en un point x de M est la variété intégrale maximale $I(x)$ telle que pour tout $y \in I(x)$,

$T_y\left(I(x)\right)=P_y$ cf. [1]. On note $F_0\left(\mathrm{M}\right)$ l'anneau des fonctions sur M constantes aux feuilles. La sous-algèbre de Lie A_S^2 des champs de vecteurs de M engendrée par S sur $F_0\left(\mathrm{M}\right)$ est commutative. De plus A_S^2 est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L des champs de vecteurs tangents aux feuilles. Par ailleurs, A_S^1 désigne l'ensemble des champs de vecteurs de M tel que A_S^1 et L sont deux sous-modules supplémentaires dans l'algèbre de Lie $L_{\mathfrak{F}}$ des automorphismes infinitésimaux au feuilletage.

On suppose que toutes les feuilles soient régulières, sauf mention expresse. Le théorème de Dazord cf. [1] p.415 assure l'existence d'une carte adaptée (U, x^a, y^i) (resp. (U, x^a)), avec $1 \leq a \leq m+q-p$, $1 \leq i \leq p$ si $p \geq 1$ (resp. $1 \leq a \leq m+q$ si $p=0$) au voisinage de chaque point x de M où la dimension de $I(x)$ est constante $p(x)=p$. Il existe une permutation ζ de $\{1,\ldots,q\}$ tels que pour $p \geq 1$ (resp. $p=0$) $\left(X_{\zeta_i} \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{1\leq i\leq p}$ et $\left(X_{\zeta_l} \underset{U}{=} 0\right)_{p<l\leq q}$ (resp. $\left(X_l \underset{U}{=} 0\right)_{1\leq l\leq q}$). On utilisera de tels ouverts pour les domaines de cartes adaptées au feuilletage. On conviendra dans la suite sauf mention expresse que les indices a, b, c vont de 1 à $m+q-p$ et i, j, l de 1 à p si $p \geq 1$. De même, les indices fixes a_0, a_1, b_0 appartiennent à $\{1, \ldots, m+q-p\}$ et i_0, j_0 à $\{1, \ldots, p\}$ si $p \geq 1$.

L'anneau $F_0\left(U\right)=\left\{f_{|U} \text{ tel que } f \in F_0\left(\mathrm{M}\right)\right\}$ est l'ensemble des fonctions sur U ne dépendant pas des coordonnées y^i. L'algèbre de Lie A_S sur toute carte adaptée U, coïncide au $F_0\left(U\right)$-module des champs sur U engendré par $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m+q-p}}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^p}$ où $p \geq 1$. Le module $A_S\left(U\right)$ se décompose en produit semi-direct

$$A_S\left(U\right)=A_S^1\left(U\right)\oplus A_S^2\left(U\right)$$

où $A_S^1\left(U\right)$ est la sous-algèbre de $A_S\left(U\right)$ engendrée par $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m+q-p}}$ sur $F_0\left(U\right)$ et, où $A_S^2\left(U\right)$ est l'idéal commutatif de $A_S\left(U\right)$ engendré par $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^p}$ sur $F_0\left(U\right)$.

Dans le cas où $p=0$, $F_0\left(U\right)=F\left(U\right)$ et

$$A_S\left(U\right)=A_S^1\left(U\right)\oplus A_S^2\left(U\right)$$

avec $A_S^1\left(U\right)=\chi(U)$ et $A_S^2\left(U\right)=\{0\}$.

On s'interesse à l'étude des $\mathbb{R}-$dérivations de l'algèbre de Lie A_S. Le cas trivial où le rang est identiquement nul sur M, est déjà étudié par [8]. Donc, on suppose que $S \neq \{0\}$.

Remarque 2.1 Si la variété M est connexe, le feuilletage défini est régulier d'après une assertion de [1] p.416.

3. Etude des dérivations de A_S

Dans toute la suite $x \in \mathrm{M}$ est un point quelconque, U est une carte adaptée contenant x telle que la dimension de $I(x)$ est une constante égale à p sur U. On utilisera la convention d'Einstein sur la sommation d'indices, sauf mention expresse.

Définition 3.1 Le centralisateur (resp. Le centre) de A_S est l'ensemble des X dans $\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ (resp. dans A_S) tels que $[X, A_S] = \{0\}$.

Proposition 3.2 *Le centralisateur $\mathfrak{C}$ de A_S est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel engendré par S.*

Démonstration. Il est immédiat que le $\mathbb{R}-$espace vectoriel engendré par S est inclus dans $\mathfrak{C}$.

Réciproquement, soit X appartenant à $\mathfrak{C}$. Sur U, si $p = 0$, alors la preuve est donnée par un résultat de [8]. Si $p \geq 1$, soit $X_{|U} = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} + X'^i \frac{\partial}{\partial y^i} \in \mathfrak{C}_U$, on a

$$\left[X^a \frac{\partial}{\partial x^a} + X'^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right] = 0, \; \left[X^a \frac{\partial}{\partial x^a} + X'^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0$$

pour tous b, j. Ainsi, chaque X^a et X'^i sont des constantes réelles en supposant que U est connexe. Par ailleurs,

$$\left[X^a \frac{\partial}{\partial x^a} + X'^i \frac{\partial}{\partial y^i}, x^c \frac{\partial}{\partial x^c}\right] = 0$$

alors on en déduit que chaque $X^a = 0$ pour tous $X \in \mathfrak{C}$ et U adaptée à $\mathfrak{F}$. Donc $\mathfrak{C}$ est contenu dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel engendré par S. D'où le résultat. ■

Remarque 3.3 Le système S n'est pas en général une base du centre de A_S. Par exemple, sur le tore T^2 avec $S = \{X\}$, où X est un champ de vecteurs invariant ayant une trajectoire dense.

Définition 3.4 Une $\mathbb{R}$-dérivation D d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ des champs de vecteurs sur M, est une application $\mathbb{R}-$linéaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ telle que

$$\forall X, Y \in \mathfrak{A}, \; D[X, Y] = [D(X), Y] + [X, D(Y)]. \tag{3.1}$$

L'application D est dite dérivation intérieure de $\mathfrak{A}$ si $D = [X, .] = \mathrm{L}_X$, avec L_X la dérivée de Lie par rapport à $X \in \mathfrak{A}$.

Dans cette section, une $\mathbb{R}$-dérivation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ est tout simplement appelée dérivation de $\mathfrak{A}$.

Proposition 3.5 *Soient D une dérivation de A_S et U un domaine d'une carte adaptée de* M *tels qu'il existe $X \in A_S$ avec $X_{|U} \equiv 0$, alors $(D(X))_{|A_S^1} \underset{U}{\equiv} 0$*

Démonstration. On considère une dérivation D de A_S. On suppose que $X \in A_S$ et $X_{|U} \equiv 0$. On peut écrire $(D(X))_{|A_S^1} \underset{U}{=} D_X^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Si $D(X)$ est non identiquement nul sur $A_S^1(U)$, il existe un point $z \in U$ tel que l'une au moins des composantes correspondantes de $D(X)$ soit non nulle en z. On suppose qu'il existe un entier a_0 tel que $D_X^{a_0}(z) \neq 0$, donc on peut trouver un ouvert V_z contenant z tel que $D_X^{a_0}(y) \neq 0$ pout tout $y \in V_z$. On prend $f \in F_0(\mathrm{M})$ où $f_{|V_z} = x^{a_0}$ avec

$\operatorname{supp}(f) \subset U$ et, $Y \in A_S$ tel que $Y_{|V_z} = \frac{\partial}{\partial y^{i_0}}$. De cette façon, $[X, fY]_{|U} \equiv 0$ et $[X, fY]_{|\complement U \subset \complement \operatorname{supp}(f)} \equiv 0$ et $[X, fY] \equiv 0$. Ainsi, la relation suivante

$$D([X, fY]) = [D(X), fY] + [X, D(fY)] \tag{3.2}$$

aboutit à une contradiction. D'où le résultat. ∎

Définition 3.6 Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux sous-modules d'une même algèbre de Lie. Le sous-module engendré par tous les crochets de $X \in \mathfrak{A}$ et $Y \in \mathfrak{B}$ est noté par $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ et que $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Lie, alors on l'appelle idéal dérivé de $\mathfrak{A}$.

Proposition 3.7 *L'idéal dérivé de A_S^1 est égal à A_S^1, l'idéal dérivé de A_S^2 est nul. Ainsi, l'idéal dérivé de A_S coïncide à la somme directe de module A_S^1 et de l'algèbre de Lie A engendrée par les $[X, Y]$ où $X \in A_S^1$ et $Y \in A_S^2$.*

Démonstration. On peut adapter la preuve de la Proposition 2.9 p.141 de [5] pour avoir $[A_S^1, A_S^1] = A_S^1$. Ainsi, l'idéal dérivé de A_S^1 coïncide à A_S^1. Par ailleurs, il est clair que $[A_S^2, A_S^2]$ est réduit à $\{0\}$. Comme $[A_S, A_S] = [A_S^1 \oplus A_S^2, A_S^1 \oplus A_S^2]$, alors cette dérnière devient $A_S^1 \oplus [A_S^1, A_S^2]$ avec $\oplus$ désigne une somme directe de modules, d'où le résultat. ∎

Dans la suite, on note $A = [A_S^1, A_S^2]$.

Proposition 3.8 *Toute dérivation non locale de A_S est à la fois à valeur dans le centre de A_S, nulle sur A_S^1 et sur $A \subset A_S^2$.*

Démonstration. Soit D une dérivation non locale de A_S, alors on peut trouver $X \in A_S$ et U un ouvert de M tel que $X_{|U} \equiv 0$ avec $D(X)$ n'est pas nul sur U. Donc il existe un ouvert $W \subset U$ contenant $x \in$ M tel que $D(X)(y) \neq 0$ pour tout $y \in W$. D'après la Proposition 3.5, on écrit $D(X) \underset{U}{=} D_X^i X_i$. Il s'en suit qu'il existe i_0 tel que $D_X^{i_0}(y) \neq 0$ pour tout y dans un ouvert $W' \subset W$ contenant x. Supposons que $D(X)$ n'appartient pas à $\mathfrak{C}$, alors on peut supposer que $\left(D_X^{i_0}\right)_{|W'}$ est non constante. On prend $f \in F_0(\mathrm{M})$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset U$ avec $f(x) \neq 0$. Aussi, peut-on trouver $Y \in A_S^1$ tel que $Y_{|U} = \frac{\partial}{\partial x^{a_0}}$ de façon que $\frac{\partial D_X^{i_0}}{\partial x^{a_0}}(x) \neq 0$. Dans ce cas, une relation analogue à celle de (3.2) donne une contradiction au point x. Par conséquent, $D(X) \in \mathfrak{C}$. On déduit du résultat qui précède et de la propriété (3.1) d'une dérivation que $D[A_S, A_S] = \{0\}$. Par la Proposition 3.7, on en tire que $D(A_S^1) = \{0\}$ et $D(A) = \{0\}$. ∎

Proposition 3.9 *L'algèbre de Lie A_S^2 est stable par toute dérivation locale de A_S.*

Démonstration. Soit D une dérivation locale de A_S, D_U est une dérivation de $A_S(U)$ en faisant le même raisonnement que celui de [8] p.157. Sur U, si $p = 0$ alors la preuve est évidente. Sur cet ouvert, si $p \geq 1$ alors l'algèbre de Lie A_S s'écrit $A_S(U) = A_S^1(U) \oplus A_S^2(U)$. Or, chaque $\frac{\partial}{\partial y^i}$ est un élément du centre de $A_S(U)$ et que le centre d'une algèbre de Lie est un idéal caractéristique, alors $D_U\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ appartient au centre qui est contenu dans $A_S^2(U)$ par la Proposition 3.2. Pour chaque a,b, de la relation $\left[\frac{\partial}{\partial x^a}, x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right] = \delta_a^b\frac{\partial}{\partial y^i}$, on obtient $\delta_a^b D_U\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \left[D_U\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right), x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x^a}, D_U\left(x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\right]$. Or $A_S^2(U)$ est un idéal de $A_S(U)$, alors $\left[\frac{\partial}{\partial x^a}, D_U\left(x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\right] \in A_S^2(U)$. Ainsi, en posant $D_U\left(x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = D_{i,b}^c\frac{\partial}{\partial x^c} + D_{i,b}^{j+m+q-p}\frac{\partial}{\partial y^j}$, chaque $D_{i,b}^c$ est constant. D'autre part, en appliquant D_U à l'égalité $x^b\frac{\partial}{\partial y^i} = \left[x^c\frac{\partial}{\partial x^c}, x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right]$, il s'en suit que $D_U\left(x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + \left[D_U\left(x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right), x^c\frac{\partial}{\partial x^c}\right]$ appartient à $A_S^2(U)$. Comme chaque $D_{i,b}^c$ est constant, on obtient $D_{i,b}^c = 0$. Autrement dit, $D_U\left(x^b\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ est un élément de $A_S^2(U)$. En dérivant par D_U la relation $\left[f\frac{\partial}{\partial x^a}, x^a\frac{\partial}{\partial y^i}\right] = f\frac{\partial}{\partial y^i}$ pour tout $f \in F_0(U)$, on trouve que $D_U\left(f\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ est encore dans $A_S^2(U)$. Sachant que tout élément de $A_S^2(U)$ est engendré par les $\frac{\partial}{\partial y^i}$ sur les fonctions de $F_0(U)$, toute dérivation D_U de $A_S(U)$ préserve l'idéal $A_S^2(U)$. D'où le résultat. ∎

Proposition 3.10 *L'algèbre de Lie A_S^2 est un idéal caractéristique commutatif de A_S.*

Démonstration. Soit D une dérivation de A_S, D est la somme d'une dérivation locale D_0 et d'une dérivation non locale D_1 de A_S. D'après la Proposition 3.9, on a $D_0(A_S^2) \subset A_S^2$; et de la Proposition 3.8, $D_1(A_S) \subset A_S^2$. En utilisant la $\mathbb{R}$-linéarité de D et $[A_S^2, A_S^2] = \{0\}$, on a le résultat. ∎

Théorème 3.11 *On suppose que pour tout $x \in \mathrm{M}$, $0 < p(x) < q$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *Toute dérivation de A_S est locale.*
2. *Il existe $X \in A_S^1$ et $h \in F_0(\mathrm{M})$ tels que $X(h)$ est partout non nul sur M.*
3. *L'idéal dérivé de A_S est A_S.*

Démonstration. (1.) $\Leftrightarrow$ (2.): Soit D une dérivation de A_S, D est la somme d'une dérivation locale et d'une dérivation non locale de A_S. On note alors D_1 cette dérivation non locale. Etant donné un $X \in A_S^2 - \{0\}$, on calcule $D_1(X)$. Par le fait que D_1 soit $\mathbb{R}-$linéaire, on peut supposer seulement qu'il existe $f \in F_0(\mathrm{M})$ et i_0 tels que $X = fX_{i_0}$. On écrit $D_1(X) = D_f^i X_i$; avec les $D_f^i \in \mathbb{R}$ d'après la Proposition 3.8 et la Proposition 3.2. Soient $Y \in A_S^1$, $g \in F_0(\mathrm{M})$ tels que $Y(g)$ est partout non nul, et $h \in F_0(\mathrm{M})$. Comme $D_1[hY, gX_{i_0}] = 0$ d'après la Proposition 3.8, alors chaque $D_{hY(g)}^i = 0$. Or, on peut trouver h tel que $hY(g) = f$ en posant $h = \frac{f}{Y(g)} \in F_0(\mathrm{M})$. Ainsi, $D_1(X) = 0$ pour tout $X \in A_S^2$ et par conséquent, $D_1 = 0$ car $D_{1|A_S^1} = 0$ d'après la Proposition 3.8. C'est-à-dire que toute dérivation D de A_S est locale. Réciproquement, soit D l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par

$$D(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \in A_S - \mathfrak{C}, \\ \sum\limits_{1\leq j\leq q} \alpha^j \sum\limits_{1\leq k\leq q} X_k & \text{si } X = \alpha^i X_i \text{ où } \alpha^j \in \mathbb{R} \text{ pour tout } j = 1,\ldots,q. \end{cases}$$

En supposant que quel que soit $x \in$ M, $p(x) < q$; il existe i_0 dans $\{1, \ldots, q\}$ et un ouvert U de M, tels que $X_{i_0|U} \equiv 0$. Ainsi, on a $D(X_{i_0}) = \sum_{1 \leq k \leq q} X_k$ tel que, $D\left(X_{i_0}\right)_{|U}$ est non nul, car pour tout $x \in$ U, $p(x) > 0$. Si pour tous $X \in A_S^1$ et $h \in F_0$ (M), il existe $x \in$ M tels que $X\left(h\right)\left(x\right) = 0$, alors $fX\left(h\right) = 1$ est impossible, quel que soit $f \in F_0$ (M). Alors, $[A_S^1, A_S^2]$ ne contient pas d'éléments de $\mathfrak{C} - \{0\}$, et on a $D\left(A\right) = \{0\}$. Ainsi, D est une dérivation non locale de A_S.

(2.) $\Leftrightarrow$ (3.): Si l'idéal dérivé de A_S est A_S, alors toute dérivation non locale de A_S est nulle, d'après la Proposition 3.8. Ainsi, toute dérivation de A_S est locale. D'après (1.) $\Rightarrow$ (2.), on a le résultat. Réciproquement, la deuxième partie de la preuve de (1.) $\Leftrightarrow$ (2.) permet de conclure. ∎

Remarque 3.12 On peut omettre l'hypothèse "pour tout $x \in$ M, $0 < p(x) < q$" en prouvant (2.) $\Rightarrow$ (1.), et (2.) $\Rightarrow$ (3.) du Théorème 3.11.

Remarque 3.13 Si quels que soient $f,\ h \in F_0$ (M) et $X \in A_S^1$, $fX\left(h\right) \neq 1$, la réciproque de la Proposition 3.8 est fausse car la dérivation D de A_S définie par

$$D(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \in A_S - \mathfrak{C}, \\ \alpha^k X_k & \text{si } X = \alpha^k X_k \text{ où } \alpha^k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } k = 1, \ldots, q. \end{cases}$$

est une dérivation locale. Pourtant, D vérifie toutes les conditions nécéssaires de cette proposition.

Dans les trois propositions suivantes, on suppose que $p \geq 1$ sur U.

Proposition 3.14 *Soit D une dérivation locale de A_S dans A_S^2. Si $D_U = \beta^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}$ où chaque β^i est une forme linéaire de $A_S\left(U\right)$ dans $F_0\left(U\right)$, alors β^i est fermée. De plus, si chaque β^i s'annule sur $A_S^2\left(U\right)$, alors pour tous $X, Y \in A_S(U)$, on a pour tout i*

$$\beta^i\left[X, Y\right] \frac{\partial}{\partial y^i} = \left[\beta^i\left(X\right) \frac{\partial}{\partial y^i}, Y\right] + \left[X, \beta^i\left(Y\right) \frac{\partial}{\partial y^i}\right]. \tag{3.3}$$

Démonstration. On prend $i \in \{1, \ldots, p\}$, β^i est de la forme $\beta^i = \beta_a^i dx^a + \beta'^i_j dy^j$ où chaque $\beta_a^i, \beta'^i_j \in F_0\left(U\right)$. Soient $X, Y \in A_S\left(U\right)$, par la propriété d'une dérivation, on obtient

$$D_U\left[X, Y\right] = \left[D_U\left(X\right), Y\right] + \left[X, D_U\left(Y\right)\right] \tag{3.4}$$

En posant $X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} + X'^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ et $Y = Y^a \frac{\partial}{\partial x^a} + Y'^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, alors on doit avoir

$$D_U\left[X, Y\right] = \beta_b^i X^a \frac{\partial Y^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^i} - \beta_b^i Y^a \frac{\partial X^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^i} + \beta'^i_j X^a \frac{\partial Y'^j}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^i} - \beta'^i_j Y^a \frac{\partial X'^j}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Le second membre de (3.4) devient

$$
\begin{aligned}
&Y^a\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}X^b\frac{\partial}{\partial y^i}-Y^a\frac{\partial X^b}{\partial x^a}\beta_b^i\frac{\partial}{\partial y^i}-Y^a\frac{\partial{\beta'}_j^i}{\partial x^a}X'^j\frac{\partial}{\partial y^i}-Y^a\frac{\partial X'^j}{\partial x^a}{\beta'}_j^i\frac{\partial}{\partial y^i}\\
&\qquad+X^a\frac{\partial{\beta'}_j^i}{\partial x^a}Y'^b\frac{\partial}{\partial y^i}+X^a\frac{\partial Y'^j}{\partial x^a}{\beta'}_j^i\frac{\partial}{\partial y^i}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Par identification membre à membre, on a

$$
-Y^a\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}X^b\frac{\partial}{\partial y^i}-Y^a\frac{\partial{\beta'}_j^i}{\partial x^a}X'^j\frac{\partial}{\partial y^i}+X^a\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}Y^b\frac{\partial}{\partial y^i}+X^a\frac{\partial{\beta'}_j^i}{\partial x^a}Y'^j\frac{\partial}{\partial y^i}=0
\tag{3.6}
$$

Par ailleurs, β^i est fermée si et seulement si

$$
\mathrm{d}\beta^i=\left(\frac{\partial\beta_a^i}{\partial x^b}-\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}\right)dx^b\underset{a<b}{\wedge}dx^a+\left(\frac{\partial{\beta'}_j^i}{\partial x^a}\right)dx^a\wedge dy^j=0
$$

où d désigne la différentielle extérieure. C'est-à-dire $\frac{\partial\beta_a^i}{\partial x^b}-\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}=0$ et $\frac{\partial{\beta'}_j^i}{\partial x^a}=0$ quels que soient j,a,b.

On prend $a_0,\ b_0$ avec $Y^{a_0}=X^{b_0}=1$, $X'^j=Y'^j=0$ pour tout j, et les autres nuls dans la relation (3.6). Ainsi, $\frac{\partial\beta_{a_0}^i}{\partial x^{b_0}}-\frac{\partial\beta_{b_0}^i}{\partial x^{a_0}}=0$, pour toute valeur arbitraire de a_0,b_0.

Soient $a_1,\ j_0$ avec $Y^{a_1}=X'^{j_0}=1$, tous les autres sont nuls et, $Y'^j=X^a=0$ pour tous j,a dans (3.6). On a alors $\frac{\partial{\beta'}_{j_0}^i}{\partial x^{a_1}}=0$, pour chaque valeur arbitraire de a_1,j_0. D'où la forme β^i est fermée.

Si β^i s'annule sur $A_S^2(U)$, alors $\beta^i=\beta_a^i dx^a$, pour tout a. On a

$$
\begin{aligned}
&\beta^i\left[X,Y\right]\frac{\partial}{\partial y^i}\\
&=\beta^i\left(X^a\frac{\partial Y^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}+X^a\frac{\partial Y''^l}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^l}-Y^a\frac{\partial X^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}-Y^a\frac{\partial X''^l}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^l}\right)\frac{\partial}{\partial y^i}\ .\\
&=\beta_a^iX^b\frac{\partial Y^a}{\partial x^b}\frac{\partial}{\partial y^i}-\beta_a^iY^b\frac{\partial X^a}{\partial x^b}\frac{\partial}{\partial y^i}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
\left[\beta^i\left(X\right)\frac{\partial}{\partial y^i},Y\right]+\left[X,\beta^i\left(Y\right)\frac{\partial}{\partial y^i}\right]&=-Y^a\frac{\partial\beta_a^i}{\partial x^a}X^b\frac{\partial}{\partial y^i}-Y^a\beta_b^i\frac{\partial X^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^i}\\
&\quad+X^a\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}Y^b\frac{\partial}{\partial y^i}+X^a\beta_b^i\frac{\partial Y^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^i}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Comme la forme β^i est fermée, alors $\frac{\partial\beta_a^i}{\partial x^b}-\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}$ est nul quels que soient a,b. Par conséquent, $X^a\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}Y^b\frac{\partial}{\partial y^i}=Y^a\frac{\partial\beta_b^i}{\partial x^a}X^b\frac{\partial}{\partial y^i}$. Ainsi, en identifiant (3.7) et (3.8); on obtient le résultat (3.3). ∎

Proposition 3.15 *Soit D une dérivation locale de A_S vers A_S^2. Il existe des $1-$formes différentielles fermées α^i et ω^i dans U, avec $i = 1, \dots, p$ telles que:*

1. *$D_U = (\alpha^j + \omega^j) \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}$, où chaque $ker(\alpha^j)$ contient $A_S^2(U)$ et chaque $ker(\omega^j)$ contient $A_S^1(U)$.*
2. *chaque $\alpha^i [X,Y] = X.\alpha^i (Y) - Y.\alpha^i (X)$, pour tous champs $X, Y \in A_S(U)$.*

On notera $D_U^{\alpha,\omega}$ la dérivation $(\alpha^j + \omega^j) \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}$ de $A_S(U)$ vers $A_S^2(U)$.

Démonstration. Soit $D : A_S \longrightarrow A_S^2$ une dérivation locale de l'algèbre de Lie A_S, donc la restriction $D_U : A_S(U) \longrightarrow A_S^2(U)$ l'est aussi. La dérivation D_U étant une application $\mathbb{R}-$linéaire de $A_S(U)$ vers $A_S^2(U)$. D_U doit s'écrire sous la forme

$$D_U = \beta^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}$$

où les β^i sont des formes linéaires de $A_S(U)$ sur $F_0(U)$.

L'algèbre de Lie A_S^2 étant un idéal caractéristique commutatif de A_S d'après la Proposition 3.9, la restriction de D sur A_S^2 est donc une dérivation de A_S^2. Alors $D_{U|A_S^2} = \omega^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}$, où ω^i sont des formes linéaires de $A_S(U)$ dans $F_0(U)$. En vertu de la Proposition 3.14, les formes β^i et ω^i sont fermées. Les formes ω^i peuvent se décomposer en $\omega^i = \omega^i_{|A_S^1(U)} + \omega^i_{|A_S^2(U)}$. En posant $\alpha^i = \beta^i - \omega^i$, les formes α^i s'annulent sur $A_S^2(U)$ pour tout i. On peut choisir α^i pour que chaque $\omega^i_{|A_S^1(U)}$ soit nulle. D'où l'assertion 3.15..
Comme $\alpha^i = \beta^i - \omega^i$, alors chaque forme α^i est fermée. Par le fait que les α^i soient fermées, pour tous $X, Y \in A_S(U)$, on a l'égalité suivante pour tout j

$$\alpha^j [X,Y] \frac{\partial}{\partial y^j} = \left[\alpha^j (X) \frac{\partial}{\partial y^j}, Y\right] + \left[X, \alpha^j (Y) \frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

d'après la Proposition 3.14. D'où l'assertion 3.15.

Réciproquement, il est immédiat de constater qu'une application D_U de $A_S(U)$ dans $A_S^2(U)$ vérifiant les assertions 3.15. et 3.15. est une dérivation de $A_S(U)$. ∎

Proposition 3.16 *La dérivation $D_U^{\alpha,\omega}$ de $A_S(U)$ vers $A_S^2(U)$ de la Proposition 3.15, avec $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^p)$ et $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^p)$ est intérieure si et seulement si, pour tout i, $\omega^i \equiv 0$ et α^i sont des formes exactes. Dans ce cas, on a $D_U^{\alpha,\omega} = -\mathrm{L}_{f^i \frac{\partial}{\partial y^i}}$, où chaque $\alpha^i = df^i$ avec f^i sont des fonctions de $F_0(U)$.*

Démonstration. On suppose que $D_U^{\alpha,\omega} = \mathrm{L}_Y$ avec $Y = Y'^i \frac{\partial}{\partial y^i} \in A_S^2(U)$. Pour simplifier les notations, on prend $\alpha^i = \alpha^i_j dx^j$ et $\omega^i = \omega^i_j dy^j$, pour chaque i.

Soit $X = (X^1, \dots, X^{m+q-p}, X'^1, \dots, X'^p)$ un élément de $A_S(U)$, or $D_U = (\alpha^i + \omega^i) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$ donc

$$\begin{aligned} D_U(X) &= \left(\left(\alpha^i + \omega^i\right) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}\right)(X) = \left(X^j \alpha^i_j + X'^j \omega^i_j\right) \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= \left[Y'^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X'^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = -X^j \frac{\partial Y'^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

On a pour tout i

$$X^j \alpha_j^i + X'^j \omega_j^i = -X^j \frac{\partial Y'^i}{\partial x^j} \tag{3.9}$$

On pose dans (3.9) $X^j = 0$ quel que soit j et, $X'^j = 1$ pour un j fixé, avec $X'^l = 0$ pour $l \neq j$; on obtient $\omega_j^i = 0$ quel que soit i.

Maintenant, on pose dans (3.9) $X^j = 1$ pour j fixé, avec $X^l = 0$ pour $l \neq j$, on a $\alpha_j^i = -\frac{\partial Y'^i}{\partial x^j}$ quel que soit i. Ainsi chaque $\alpha^i = -\frac{\partial Y'^i}{\partial x^j} dx^j = df^i$ et $f^i = -Y'^i \in F_0(U)$. Donc α^i est une 1-forme exacte sur U, pour tout i.

Inversement, d'après l'assertion 3.15. de la Proposition 3.15, $D_U = \alpha^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$ car $\omega^j = 0$ quel que soit j. Or les α^i sont des formes exactes, alors $\alpha^i = df^i$ où f^i sont des fonctions de $F_0(U)$.

Soit $X = (X^1, \ldots, X^{m+q-p}, X'^1, \ldots, X'^p) \in A_S(U)$, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha^i(X) &= \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^i}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial f^i}{\partial x^{m+q-p}} dx^{m+q-p} \right)(X) \\ &= X^1 \frac{\partial f^i}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial f^i}{\partial x^2} + \cdots + X^{m+q-p} \frac{\partial f^i}{\partial x^{m+q-p}} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} D_U \left(X^1, \ldots, X^{m+q-p}, X'^1, \ldots, X'^p \right) &= \left(\alpha^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \right)(X) \\ = \left(X^1 \frac{\partial f^i}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial f^i}{\partial x^2} + \cdots + X^{m+q-p} \frac{\partial f^i}{\partial x^{m+q-p}} \right) \frac{\partial}{\partial y^i} &= - \left[f^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \\ = - \left[f^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] - \left[f^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X'^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right] &= - \left[f^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X'^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right] \end{aligned}$$

car f^i et X'^i ne dépendent pas des y^l.

Alors $D_U^{\alpha,0} = D_U = -\mathrm{L}_{f^i \frac{\partial}{\partial y^i}}$ avec $f^j \frac{\partial}{\partial y^j} \in A_S^2(U)$.

Il en résulte que $D_U^{\alpha,\omega}$ est une dérivation intérieure si et seulement si les $\omega^i \equiv 0$ et $\alpha^i = df^i$, où les f^i sont des fonctions de $F_0(U)$. Dans ce cas, la dérivation $D_U^{\alpha,0} = -\mathrm{L}_{f^i \frac{\partial}{\partial y^i}}$. ∎

On rappelle le résultat classique suivant:

Proposition 3.17 *Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs de* M, *Γ un idéal caractéristique de $\mathfrak{A}$, D une dérivation sur $\mathfrak{A}$, π la projection canonique de $\mathfrak{A}$ sur l'algèbre-quotient $\mathfrak{A}/\Gamma$. En posant $D'_\pi(X) = \pi(D(X))$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$, D' définit une dérivation sur $\mathfrak{A}/\Gamma$. En particulier, si $D = \mathrm{L}_X$ alors $D' = \mathrm{L}_{\pi(X)}$.*

Proposition 3.18 *Toute dérivation locale D de l'algèbre de Lie A_S s'écrit d'une manière unique sous la forme $\mathrm{L}_X + D^0$ avec $X \in A_S^1$ et, pour toute carte adaptée U, $D^0{}_{|U} = 0$ si la dimension de U est nulle; $D^0{}_{|U} = D^{\alpha,\omega}$ une dérivation définie par la Proposition 3.15 sinon.*

Démonstration. Soit D une dérivation locale de A_S. Il vient que l'algèbre de Lie quotient $A_S(U)/A_S^2(U)$ est isomorphe à $A_S^1(U)$, et est donc isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^{m+q-p}$. Or toute dérivation de $\chi(\mathbb{R}^{m+q-p})$ est intérieure d'après un résultat de [5], alors toute dérivation de l'algèbre de Lie $A_S(U)/A_S^2(U)$ est intérieure. En vertu de la Proposition 3.17, toute dérivation D_U de $A_S(U)$ est de la forme $D'_U = \mathrm{L}_{\pi(Y)}$, avec $Y \in A_S^1(U)$, où $\pi : A_S(U) \to A_S(U)/A_S^2(U)$ est la projection canonique. En posant $D^0 = D - \mathrm{L}_X$ où $X \in A_S^1$ tel que $X_{|U} = Y$, la dérivation correspondante ${D^0}'_U$ de l'algèbre-quotient est nulle, $D^0{}_U$ est donc une dérivation de $A_S(U)$ dans $A_S^2(U)$. Si $p = 0$ alors $D^0{}_U = 0$. Si $p > 0$, d'après la Proposition 3.15, sur une carte adaptée au feuilletage; $D^0{}_U$ est de la forme $D_U^{\alpha,\omega}$. D'où la décomposition annoncée. ∎

Théorème 3.19 *Si le rang de S est constant égal à $p \in [1, q]$, le premier espace de cohomologie locale de Chevalley-Eilenberg $\mathrm{H}^1_{loc}(A_S)$ de A_S est isomorphe à $(\mathrm{H}^1_R(\mathrm{B}) \times \mathbb{R})^p \times \mathbb{R}^{p^2}$, où $\mathrm{H}^1_R(\mathrm{B})$ désigne le premier espace de cohomologie de de Rham sur les formes basiques au feuilletage de* M.

Démonstration. Soit D une dérivation locale de A_S, alors la restriction D_U de D à une carte adaptée U au feuilletage est une dérivation de $A_S(U)$. D'après la Proposition 3.18, D_U se décompose en une somme de deux dérivations $D_U = \mathrm{L}_{X_{|U}} + D_U^{\alpha,\omega}$, où $X_{|U} \in A_S^1(U)$ et, où $D_U^{\alpha,\omega}$ est une dérivation définie dans la Proposition 3.15. Si le rang $p \geq 1$ de S est constant, une dérivation $D_U^{\alpha,\omega}$ s'écrit d'une façon unique $D_U^{\alpha,\omega} = D_U^{\alpha,0} + D_U^{0,\omega}$ et l'expression $D_U^{\alpha,0} \circ D_U^{0,\omega}$ est nulle. L'algèbre des dérivations de la forme $D_U^{0,\omega}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathrm{gl}(\mathbb{R}^p)$ des endomorphismes de $A_S^2(U)$. D'autre part, en notant $\alpha_U = (\alpha_U^1, \ldots, \alpha_U^p)$, on a la somme des dérivations $D_U^{\alpha,0} = D_U^{\alpha^1,0} + \cdots + D_U^{\alpha^p,0}$ telles que $D_U^{\alpha^i,0} \circ D_U^{\alpha^j,0} = 0$ pour tous i, j. Les α^i, $i = 1, \ldots, p$ sont des tenseurs invariants par transition des cartes adaptées. L'ensemble des α^i s'identifie à $Z^1(\mathrm{B})_{|U} \times \mathbb{R}$ cf. [4], $Z^1(\mathrm{B})_{|U}$ étant l'ensemble des 1-formes basiques et fermées sur U. L'ouvert U est un domaine d'une carte adaptée quelconque de M, d'où le résultat. ∎

Remarque 3.20 On suppose qu'il existe une feuille singulière du feuilletage $\mathfrak{F}$. En travaillant sur l'ensemble ouvert des points réguliers R dense dans M, on trouve sur la variété R le même résultat que celui de la Proposition 3.18. Si le prolongement de X correspondant à D dans cette proposition est dans A_S^1 et que chaque prolongement de α et de ω sont C^∞, alors la Proposition 3.18 reste valable sur M.

Exemple 3.21 Soit $\mathrm{M} = \mathbb{R}^3$ de coordonnées canoniques (x, y, z) , $S = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$. Les éléments de A_S sont de la forme $f(x)\frac{\partial}{\partial x} + g(x)\frac{\partial}{\partial y} + h(x)\frac{\partial}{\partial z}$, pour toutes fonctions C^∞, f, g et h ne dépendant que de x. D'après nos théorèmes, le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg $\mathrm{H}^1(A_S) = \mathrm{H}^1_{loc}(A_S)$ est de dimension six. La Proposition 3.15 donne la construction d'une base des dérivations non intérieures de A_S dont les éléments sont les suivants:

$$D_1 = dy \otimes \frac{\partial}{\partial y} \qquad D_2 = dz \otimes \frac{\partial}{\partial y} \qquad D_3 = dy \otimes \frac{\partial}{\partial z}$$

$$D_4 = dz \otimes \frac{\partial}{\partial z} \qquad D_5 = \psi \otimes \frac{\partial}{\partial y} \qquad D_6 = \psi \otimes \frac{\partial}{\partial z}$$

où ψ désigne l'application $\psi\left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$.

Remarque 3.22

1. Si la structure de la variété M feuilletée par $\{X_1, \ldots, X_p\}$ est transversalement orientable, alors chaque forme α^i du Théorème 3.19 s'écrit

$$\alpha^i = \gamma^i + k\varphi$$

   où chaque γ^i est une 1-forme basique fermée, k un nombre réel et φ la divergence de la structure transversale.

2. Si C est le champ de Liouville sur le fibré vectoriel TM de la variété M. On désigne par $A_C = \{X \in \mathcal{X}(T\mathrm{M})$ tel que $[X, C] = 0\}$. Soit $\{0\}$ la section nulle de TM, on pose $S = \{C\}$ dans la variété $\overset{\circ}{T}\mathrm{M} = T\mathrm{M} - \{0\}$. L'algèbre de Lie A_S est égale à l'algèbre de Lie $\overset{\circ}{A}_C$ définie dans [2]. Toute dérivation de $\overset{\circ}{A}_C$ est une dérivation indiquée dans la Proposition 3.18. Ce résultat est prolongeable sur TM, d'où le résultat de [4] sur $\mathrm{H}^1(A_C)$.

References

[1] Guedira, F. and Lichnérowicz, A., *Géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov*, J. Math. Pures Appl., 63 (1984), 407–484.

[2] Klein, J., *On Lie algebras of vector fields defined by vector forms*, Colloquia Math. Societatis Janos Bolyai, Debrecen, Hongrie (1987).

[3] Lichnérowicz, A., *Algèbres de Lie attachées à un feuilletage*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 1 (1979), 45–76.

[4] Lecomte, P., *On the infinitesimal automorphism of the vector bundle*, J. Math. Pures Appl., 60 (1981), 229–239.

[5] Randriambololondrantomalala, P., Ravelonirina, H.S.G. and Anona, M., *Sur les algèbres de Lie d'une distribution et d'un feuilletage généralisé*, African Diaspora Journal of Mathematics, 10 (2) (2010), 135–144.

[6] Ravelonirina, H.S.G., Randriambololondrantomalala, P. and Anona, M., *Sur les algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux*, African Diaspora Journal of Mathematics, 10(2) (2010), 87–95.

[7] Sussmann, H.J., *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions,* Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1973), 171–188.

[8] Takens, F., *Derivations of vector fields*, Compositio Mathematica, 26 (1973), 151–158.

Accepted: 19.10.2011