INÉGALITÉS DE TYPE FAIBLE POUR L'OPÉRATEUR MAXIMAL FRACTIONNAIRE DANS LES ESPACES DE MORREY PAR RAPPORT À LA CAPACITÉ DE HAUSDORFF

Modeste Essoh
Ibrahim Fofana
Konin Koua

UFR de Mathématiques et Informatique
Université de Cocody
22 bp 582 Abidjan 22
Côte d'Ivoire
e-mail: birilowe@yahoo.fr
fofana_ib_math_ab@yahoo.fr
kroubla@yahoo.fr

Abstract. We prove a boundedness property for the fractional maximal operator in the Morrey type spaces with respect to the Hausdorff content. As an application of this result, we obtain a Fefferman-Stein inequality.

1. Introduction

Soit n un entier positif non nul.

Sauf mention spécifique, α, λ, δ et p sont des nombres réels vérifiant:

$$0 \leq \alpha < n \, ; \quad 0 < \delta \leq n \, ; \quad 0 \leq \lambda \leq \delta \, ; \quad 1 \leq p < +\infty.$$

On appellera cube, tout cube Q de $\mathbb{R}^n$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Si Q est un cube, alors $\ell(Q)$ et $\mathring{Q}$ désignent respectivement la longueur de ses côtés et son intérieur.

Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ alors $|E|$ est sa mesure de Lebesgue et χ_E sa fonction caractéristique.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

La δ-capacité de Hausdorff $H^\delta(E)$ de E est

$$H^\delta(E) = \inf_{(Q_i)_i} \left\{ \sum_i \ell(Q)^\delta, \; E \subset \bigcup_i Q_i \right\} \tag{1}$$

où l'infinimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables $(Q_i)_i$ de E, Q_i étant un cube pour tout i.

Si dans l'expression (1) on prend l'infinimum sur tous les recouvrements dénombrables de E par des cubes dyadiques, on obtient la δ-capacité dyadique de Hausdorff $H^{\delta}_{\Delta}(E)$ de E.

Soit f une fonction localement intégrable de $\mathbb{R}^n$.

- La fonction maximale fractionnaire d'ordre α de f est

$$M_\alpha f(x) = \sup_{\substack{Q \\ Q \ni x}} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)|dy$$

où le supremum est pris sur tous les cubes Q contenant x.

Bien entendu, lorsque $\alpha = 0$, $M_0 = M$ est l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood.

- On rappelle que f appartient à l'espace de Morrey classique $L^{p,\lambda}(dx)$ si et seulement si la quantité

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(dx)} = \sup_{Q} \left[\frac{1}{\ell(Q)^\lambda} \int_Q |f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \text{ est finie};$$

et f appartient à l'espace de Morrey de type faible $L^{p,\lambda}_*(dx)$ si et seulement si la quantité

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}_*(dx)} = \sup_{\substack{t>0 \\ Q}} t \left[|\left\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, |f(x)| > t\right\} \cap Q|\right]^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^{\frac{-\lambda}{p}} \text{ est finie.}$$

Par analogie, on dit que f appartient à l'espace faible de Morrey $L^{p,\lambda}(H^\delta)$ par rapport à la δ-capacité de Hausdorff, si et seulement si la quantité

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}_*(H^\delta)} = \sup_{\substack{t>0 \\ Q}} t \left[H^\delta\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, |f(x)| > t\} \cap Q\right\}\right]^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^{\frac{-\lambda}{p}} \text{ est finie.}$$

On remarquera que $L^{p,0}(H^\delta)$ et $L^{p,0}_*(H^\delta)$ sont respectivement l'espace (fort) de Lebesgue $L^p(H^\delta)$ et l'espace faible de Lebesgue $L^p_*(H^\delta)$ par rapport à la δ-capacité de Hausdorff étudiés par de nombreux auteurs comme D.R. Adams ([1] et [2] par exemple), J. Orobitg et J. Verdera ([6] par exemple).

Enfin C désigne une constante dont la valeur peut changer d'une proposition à une autre.

Dans [5], Kuznetsov a montré l'inégalité suivante:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} (M_\alpha f_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^1_*(H^{n-\alpha})} \leq C \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L^1(dx)}, \tag{2}$$

où $\{f_i\}_i$ est une famille de fonctons et $1 < p < +\infty$.

Dans la preuve de (2), l'inégalité suivante de type Fefferman-Stein:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^1(H^\delta)} \leq C \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L_*^1(H^\delta)} \tag{3}$$

a joué un role central. En effet dans [2], D.R. Adams a montré que pour toute fonction f et $\delta \geq \dfrac{d}{n}(n-\alpha)$ on a l'inégalité

$$\|M_\alpha f\|_{L_*^{\frac{\delta}{n-\alpha}}(H^\delta)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{d}{n}}(H^d)}. \tag{4}$$

Il est clair que (4) équivaut à

$$\|M_\alpha f\|_{L_*^{\frac{\delta}{n-\alpha}}(H^\delta)} \leq C \|f\|_{L^1(dx)} \text{ avec } \delta \geq n-\alpha. \tag{5}$$

Il suffit de prendre dans (4) $d = n$ pour avoir (5).

Réciproquement, comme pour toute fonction positive f et tout réel d tel que $0 < d \leq n$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \frac{n}{d} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{d}{n}} dH^d \right)^{\frac{n}{d}}$$

(voir [6], Lemme 3), de (5) on obtient (4) car $\dfrac{d}{n} \leq 1$.

En prenant $\delta = n - \alpha$ et en écrivant (3) pour $M_\alpha f_i$ au lieu de f_i puis en utilisant (5), on obtient (2).

L'inégalité (5) exprime le fait que: *si une fonction f appartient à l'espace de Lebesgue $L^1(dx)$ alors sa fonction maximale fractionnaire $M_\alpha f$ appartient à l'espace $L_*^{1,0}(H^\delta)$.*

Celà nous amène à la question suivante: *à quelle classe de fonctions appartient la fonction maximale fractionnaire $M_\alpha f$ lorsque f appartient à l'espace de Morrey $L^{1,\lambda}(dx)$?*

Remarquons qu'il existe bien des fonctions appartenant à $L^{1,\lambda}(dx)$ mais qui n'appartiennent pas à $L^1(dx)$. Il suffit, par exemple, de considérer la fonction

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{\lambda}{n}-1}.$$

Le théorème 1 suivant donne une réponse à cette question.

Théorème 1. *Supposons que $0 \leq \alpha < n$, $\delta \geq \lambda \geq 0$, $\delta \geq n - \alpha$ et posons $\mu = \dfrac{\lambda}{\delta}(n-\alpha)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^{1,\mu}(dx)$ on ait*

$$\|M_\alpha f\|_{L_*^{\frac{\delta}{n-\alpha},\lambda}(H^\delta)} \leq C \|f\|_{L^{1,\mu}(dx)}.$$

Le théorème suivant généralise l'inégalité (2).

Théorème 2. *Soient* $0 \leq \alpha < n$, $\lambda \leq \delta = n - \alpha$ *et* $1 < p < +\infty$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour toutes fonctions* $\{f_i\}_{i=1,\dots,\infty}$, *on ait*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} (M_\alpha f_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)} \leq C \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L^{1,\lambda}(dx)}.$$

Il s'obtient par une argumentation similaire à la preuve de l'inégalité (2) figurant dans [5], moyennant l'utilisation de la généralisation suivante de l'inégalité (3).

Théorème 3. *Soient* $1 < p < +\infty$, $0 < \delta \leq n$, $0 \leq \lambda \leq n$ *et soit* $\{f_i\}_{i=1,\dots,\infty}$ *des fonctions positives telles que* $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)} < \infty$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *indépendante des* f_i *telle que:*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)} \leq C \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)}.$$

2. Preuve du Théorème 1

Afin de prouver ce théorème, on montre d'abord le lemme suivant:

Lemme 1. *Soient* Q *et* P *deux cubes vérifiant:* $\overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{\widehat{3P}} = \emptyset$ *et* $(3P) \cap Q \neq \emptyset$. *Alors* $Q \subset 9P$ *ou* $3P \subset \overset{\circ}{\widehat{3Q}}$.

Preuve. Supposons que $\ell(3P) \geq \ell(Q)$. Alors $Q \subset 3(3P) = 9P$.

Supposons maintenant que $\ell(3P) < \ell(Q)$. Soit u un élément de l'intersection des frontières des cubes $3P$ et Q. $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$|x_{P,k} - u_k| \leq \tfrac{\ell(3P)}{2} \text{ et } |u_k - x_{Q,k}| \leq \tfrac{\ell(Q)}{2}$$

où $x_{P,k}$ et $x_{Q,k}$ sont les k-ièmes coordonnées respectives des centres x_P et x_Q des cubes P et Q. Donc

$$|x_{P,k} - x_{Q,k}| \leq \frac{\ell(3P)}{2} + \frac{1}{2}\ell(Q) < \ell(Q).$$

Soit $x \in 3P$. On a:

$$\begin{array}{rcl} |x_k - x_{Q,k}| & \leq & |x_k - x_{P,k}| + |x_{P,k} - x_{Q,k}| \\ & < & \frac{\ell(3P)}{2} + \ell(Q) < \frac{\ell(3Q)}{2} \end{array}$$

c'est à dire $x \in 3Q$. D'où $3P \subset \overset{\circ}{\widehat{3Q}}$. ∎

Rappelons également quelques propriétés de la capacité de Hausdorff essentielles dans la preuve du Théorème 1.

Proposition 1. (voir [1] page 117) *Soit* $0 < \delta \leq n$.

P1: H^δ_Δ *et* H^δ *sont comparables c'est-à-dire qu'il existe des constantes* A *et* B *telles que*

$$H^\delta_\Delta(E) \leq AH^\delta(E) \leq BH^\delta_\Delta(E)$$

pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$.

P2: H^δ_Δ *est continue pour les suites croissantes c'est-à-dire si* $(E_j)_j$ *est une suite croissante de sous-ensembles de* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $E = \cup E_j$ *alors*

$$\lim_{j\to\infty} H^\delta_\Delta(E_j) = H^\delta_\Delta(E).$$

Preuve du Théorème 1. Soit Q un cube de $\mathbb{R}^n$. Fixons $t > 0$ et posons

$$\Omega_t = \{x \in Q / M_\alpha f(x) > t\} = Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n / M_\alpha f(x) > t\}$$

Étape 1: Soit k l'unique entier de $\mathbb{Z}$ tel que $2^{-k-1} < l(Q) \leq 2^{-k}$. Alors Q rencontre au moins un cube et au plus 2^n cubes dyadiques d'ordre k. Plus précisément, on a: $Q \subset \underset{j\in J}{\cup} Q_j$ avec $card(J) \leq 2^n$, où les Q_j sont des cubes dyadiques d'ordre k rencontrant Q et $Q \subset 3Q_j$.

Posons maintenant, pour tout $j \in J$, $\Omega^j_t = \{x \in Q_j / M_\alpha f(x) > t\}$. On a:

$$\begin{aligned} x \in \Omega_t &\Leftrightarrow x \in Q \text{ et } M_\alpha f(x) > t \\ &\Rightarrow \exists j \in J,\ x \in Q_j,\ M_\alpha f(x) > t \\ &\Rightarrow \exists j \in J,\ x \in \Omega^j_t. \end{aligned}$$

D'où $\Omega_t \subset \underset{j\in J}{\cup} \Omega^j_t$ et donc

$$H^\delta(\Omega_t) \leq \sum_{j\in J} H^\delta(\Omega^j_t).$$

Soit j_0 un élément de J pour lequel $H^\delta(\Omega^{j_0}_t)$ réalise le maximum des $H^\delta(\Omega^j_t)$. Ainsi donc $H^\delta(\Omega_t) \leq 2^n H^\delta(\Omega^{j_0}_t)$ avec $\ell(Q) < \ell(Q_{j_0}) \leq 2\ell(Q)$. D'où

$$\begin{aligned} &t\left[H^\delta\left(Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n / M_\alpha f(x) > t\}\right)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \\ &\quad \leq 2^{(n+\lambda)(\frac{n-\alpha}{\delta})} t\left[H^\delta\left(Q_{j_0} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / M_\alpha f(x) > t\}\right)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q_{j_0})^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}}. \end{aligned}$$

Pour cette raison on peut supposer dans la suite que le cube Q est dyadique.

Étape 2: Supposons que f est bornée et à support compact.
Il existe alors une famille $\{Q_i\}_{i\in I}$ de cubes dyadiques maximaux (pour l'inclusion) vérifiant:

pour tout $i \in I$

$$\frac{1}{|Q_i|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{Q_i} |f(y)| dy > C_{n,\alpha} t \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R}^n / M_\alpha f(x) > t\} \subset \bigcup_{i\in I} 3Q_i$$

(voir [4], page 137 et [3] Lemme 2-1) où $C_{n,\alpha} = 2^{\alpha-2n}$ est une constante qui ne dépend pas de f.
Alors tout cube Q_i de la famille $\{Q_i\}_{i\in I}$ est tel que:

$$\ell(Q) \leq \left(\frac{1}{C_{n,\alpha}t}\int_{Q_i}|f(y)|dy\right)^{\frac{1}{n-\alpha}}. \tag{6}$$

On a:

$$\begin{aligned}
\Omega_t &= Q\cap\{x\in\mathbb{R}^n/M_\alpha f(x)>t\}\subset \underset{i\in I}{\cup}(3Q_i)\cap Q\\
&\subset \bigcup_{Q_i\subsetneq Q}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{Q\subset Q_i}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{\overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}(3Q_i\cap Q)\\
&\subset \bigcup_{Q_i\subsetneq Q}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{Q\subset Q_i}(3Q_i\cap Q)\\
&\cup \bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}=\emptyset\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}\neq\emptyset\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\Omega_t &\subset \bigcup_{Q_i\subsetneq Q}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{Q\subset Q_i}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}=\emptyset\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q)\\
&\cup \bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}\neq\emptyset,\ \ell(3Q_i)<\ell(Q)\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}\neq\emptyset,\ \ell(3Q_i)\geq\ell(Q)\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q)\\
&\subset \bigcup_{Q_i\subsetneq Q}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{Q\subset Q_i}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}=\emptyset\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q)\\
&\cup \bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}\neq\emptyset,\ 3Q_i\subset 3Q\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q)\cup\bigcup_{\substack{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}\neq\emptyset,\ Q\subset 9Q_i\\ \overset{\circ}{Q}\cap\overset{\circ}{Q}_i=\emptyset}}(3Q_i\cap Q).
\end{aligned}$$

D'où

$$\Omega_t\subset\bigcup_{3Q_i\subset 3Q}3Q_i\cup\bigcup_{Q\subset 9Q_i}3Q_i\cup\bigcup_{\overset{\circ}{Q}\cap 3\overset{\frown}{\overset{\circ}{Q}_i}=\emptyset}(3Q_i\cap Q).$$

Par le Lemme 1, on obtient

$$\Omega_t \subset \bigcup_{3Q_i \subset 3Q} 3Q_i \cup \bigcup_{Q \subset 9Q_i} 3Q_i.$$

Supposons qu'il existe i_0 tel que $Q \subset 9Q_{i_0}$. Comme $\Omega_t \subset Q$, on a:

$$\begin{aligned} H^\delta(\Omega_t) &\leq \ell(Q)^\delta \\ H^\delta(\Omega_t)\ell(Q)^{-\lambda} &\leq \ell(Q)^{\delta-\lambda} \leq 9^{\delta-\lambda}\ell(Q_{i_0})^{\delta-\lambda}, \end{aligned}$$

et par suite, d'après l'inégalité (6),

$$H^\delta(\Omega_t)\ell(Q)^{-\lambda} \leq 9^{\delta-\lambda}\ell(Q_{i_0})^{-\lambda}\,(C_{n,\alpha}t)^{-\frac{\delta}{n-\alpha}}\left(\int_{Q_{i_0}}|f(y)|dy\right)^{\frac{\delta}{n-\alpha}},$$

c'est-à-dire:

$$t\left[H^\delta(\Omega_t)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}}\ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \leq C\left[\frac{1}{\ell(Q_{i_0})^\mu}\int_{Q_{i_0}}|f(y)|dy\right].$$

Supposons que $\{i/\ \ Q \subset 9Q_i\} = \emptyset$. Alors $\Omega_t \subset \bigcup_{3Q_i \subset 3Q} 3Q_i$ et donc, en utilisant l'inégalité (6) et ensuite $\dfrac{\delta}{n-\alpha} \geq 1$, on obtient:

$$\begin{aligned} H^\delta(\Omega_t) &\leq 3^\delta \sum_{3Q_i \subset 3Q} \ell(Q_i)^\delta \\ &\leq 3^\delta\,(C_{n,\alpha}t)^{-\frac{\delta}{n-\alpha}} \sum_{3Q_i \subset 3Q}\left(\int_{Q_i}|f(y)|dy\right)^{\frac{\delta}{n-\alpha}} \\ &\leq 3^\delta\,(C_{n,\alpha}t)^{-\frac{\delta}{n-\alpha}}\left(\sum_{3Q_i \subset 3Q}\int_{Q_i}|f(y)|dy\right)^{\frac{\delta}{n-\alpha}} \\ &\leq 3^\delta\,(C_{n,\alpha}t)^{-\frac{\delta}{n-\alpha}}\left(\int_{\bigcup_{3Q_i \subset 3Q} Q_i}|f(y)|dy\right)^{\frac{\delta}{n-\alpha}} \\ &\leq 3^\delta\,(C_{n,\alpha}t)^{-\frac{\delta}{n-\alpha}}\left(\int_{3Q}|f(y)|dy\right)^{\frac{\delta}{n-\alpha}}. \end{aligned}$$

$$t\left[H^\delta(\Omega_t)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}}\ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \leq C\left[\frac{1}{\ell(3Q)^\mu}\int_{3Q}|f(y)|dy\right].$$

Dans tous les cas on a

$$t\left[H^\delta(\Omega_t)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}}\ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \leq C\|f\|_{L^{1,\mu}(dx)}. \tag{7}$$

Étape 3: Revenons au cas général où f est une fonction localement intégrable. Posons pour tout entier positif non nul k,

$$f_k = \min\{k, \ \ |f|\chi_{B(0,k)}\} \quad \text{et} \quad \Omega_{k,t} = \{x \in Q, \ \ M_\alpha f_k(x) > t\},$$

où $B(0,k)$ est la boule de centre 0 et de rayon k. On a:

$$f_k \uparrow |f| \quad \text{et} \quad \Omega_{k,t} \uparrow \cup_k \Omega_{k,t} = \Omega_t.$$

De plus, (7) est vraie pour $f = f_k$ et $\Omega_t = \Omega_{k,t}$ et on a

$$t\left[H^\delta(\Omega_{k,t})\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \leq C\|f_k\|_{L^{1,\mu}(dx)} \leq C\|f\|_{L^{1,\mu}(dx)}.$$

En vertu de la Proposition 1, H^δ_Δ et H^δ sont comparables et

$$\lim_{k\to+\infty} H^\delta_\Delta(\Omega_{k,t}) = H^\delta_\Delta(\Omega_t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} t\left[H^\delta(\Omega_t)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} &\leq A^{-1}Bt\left[H^\delta_\Delta(\Omega_t)\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \\ &= A^{-1}Bt\lim_{k\to\infty}\left[H^\delta_\Delta(\Omega_{k,t})\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \\ &\leq A^{-1}BAt\lim_{k\to\infty}\left[H^\delta(\Omega_{k,t})\right]^{\frac{n-\alpha}{\delta}} \ell(Q)^{-\lambda\frac{n-\alpha}{\delta}} \\ &\leq A^{-1}BAC\|f\|_{L^{1,\mu}(dx)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|M_\alpha f\|_{L_*^{\frac{\delta}{n-\alpha},\lambda}(H^\delta)} \leq C\|f\|_{L^{1,\mu}(dx)}. \qquad \blacksquare$$

3. Preuve des Théorèmes 3 et 2

La démonstration reprend dans les grandes lignes la preuve du Corollaire 5.2.3 de [5] avec quelques aménagements.

Preuve du Théorème 3. Nous montrons ce résultat pour H^δ_Δ au lieu de H^δ puisque H^δ_Δ et H^δ sont comparables.

- Soit N un entier positif, on suppose que

$$\|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta_\Delta)} := \sup_{\substack{t>0\\ Q}} H^\delta_\Delta\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,/ |f_i(x)| > t\} \cap Q\right)\ell(Q)^{-\lambda} = 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, N$ et $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,N}$ des nombres réels positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

On montre qu'il existe une constante C indépendante des f_i telle que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i f_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} \leq C \frac{p}{p-1}. \tag{8}$$

En effet, (8) est trivial pour $N = 1$.

Si $N \geq 2$, on pose

$$F = \left(\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i f_i)^p) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout cube Q et pour tout $t > 0$, on considère les ensembles

$$\begin{aligned} \Omega_{t,i} &= \{x \in Q;\ \alpha_i f_i(x) > t\} \,\forall\, i, \\ \widetilde{\Omega}_t &= \left\{ x \in Q \backslash \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{t,i} \,/\, F(x) > t \right\} \quad \text{et} \\ \widetilde{\Omega}_{t,i} &= \left\{ x \in Q;\ t \geq \alpha_i f_i(x) > \frac{t}{N^{\frac{1}{p}}} \right\} \forall\, i. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \{x \in Q \,/\, F(x) > t\} &\subset \left(\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{t,i} \right) \cup \widetilde{\Omega}_t \quad \text{et} \\ \widetilde{\Omega}_t &\subset \bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{\Omega}_{t,i}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} & tH_\Delta^\delta \left(\{x \in Q \backslash\, F(x) > t\} \right) \ell(Q)^{-\lambda} \\ & \quad \leq tH_\Delta^\delta \left(\widetilde{\Omega}_t \right) \ell(Q)^{-\lambda} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} \\ & \quad \leq tH_\Delta^\delta \left(\widetilde{\Omega}_t \right) \ell(Q)^{-\lambda} + 1. \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} H_\Delta^\delta \left(\widetilde{\Omega}_t \right) &\leq H_\Delta^\delta \left(\bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{\Omega}_{t,i} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} H_\Delta^\delta \left(\left\{ x \in Q;\ \alpha_i f_i(x) > \frac{t}{N^{\frac{1}{p}}} \right\} \right) \\ &\leq \frac{N^{\frac{1}{p}}}{t} \ell(Q)^{\lambda}. \end{aligned} \tag{10}$$

Puisque $F(x) > t$ pour tout $x \in \widetilde{\Omega}_t$, on a

$$\begin{aligned} t^p H_\Delta^\delta\left(\widetilde{\Omega}_t\right) &\leq \int_0^{+\infty} H_\Delta^\delta\left(\left\{x \in Q \,/\, F(x)^p \chi_{\widetilde{\Omega}_t}(x) > s\right\}\right) ds \\ &:= \int_Q (F(x))^p \chi_{\widetilde{\Omega}_t}(x) dH_\Delta^\delta \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \int_Q (\alpha_i f_i(x))^p \chi_{\widetilde{\Omega}_t}(x) dH_\Delta^\delta. \end{aligned} \tag{11}$$

Comme pour tout $x \in \widetilde{\Omega}_t$ $\alpha_i f_i(x) \leq t$, on a:

$$\begin{aligned} \int_Q (\alpha_i f_i(x))^p \chi_{\widetilde{\Omega}_t}(x) dH_\Delta^\delta &= \int_0^{t^p} H_\Delta^\delta\left(\left\{x \in Q \,/\, (\alpha_i f_i(x))^p \chi_{\widetilde{\Omega}_t}(x) > s\right\}\right) ds \\ &\leq \int_0^{\alpha_i \frac{t^p}{N^{\frac{1}{p}}}} H_\Delta^\delta\left(\widetilde{\Omega}_t\right) \\ &\quad + \int_{\alpha_i \frac{t^p}{N^{\frac{1}{p}}}}^{t^p} H_\Delta^\delta\left(\left\{x \in Q \,/\, (\alpha_i f_i(x))^p > s\right\}\right) ds \\ &\leq C\, \alpha_i t^{p-1} \frac{p}{p-1} \ell(Q)^\lambda \quad \text{d'après (10).} \end{aligned}$$

En utilisant (9) et l'inégalité ci-dessus on obtient:

$$t H_\Delta^\delta\left(\left\{x \in Q \,/\, F(x) > t\right\}\right) \leq C \frac{p}{p-1}.$$

D'où

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i f_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} \leq C \frac{p}{p-1}.$$

Supposons maintenant que

$$\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} < \infty.$$

En considérant les fonctions

$$\frac{f_i}{\|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)}}$$

et les réels

$$\frac{\|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)}}{\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)}},$$

on a d'après ce qui précède que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^N f_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} \leq C \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)}.$$

- Pour le cas général où $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)} < \infty$, on a

$$g_N = \left(\sum_{i=1}^{N} (f_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \uparrow \left(\sum_{i=1}^{+\infty} (f_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} = g.$$

La propriété P2 de la Proposition 1 assure que

$$\begin{aligned} tH_\Delta^\delta\left(\{x \in Q \,/\, g(x) > t\}\right) \ell(Q)^{-\lambda} &= \lim_{N\to+\infty} tH_\Delta^\delta\left(\{x \in Q \,/\, g_N(x) > t\}\right) \ell(Q)^{-\lambda} \\ &\leq \lim_{N\to+\infty} \|g_N\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} \\ &\leq \lim_{N\to+\infty} C\frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)} \leq C\frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H_\Delta^\delta)}. \qquad \blacksquare$$

Preuve du théorème 2. Sous les hypothèses du Théorème 2, le Théorème 3 donne pour tout i,

$$\|M_\alpha f_i\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)} \leq C\|f_i\|_{L^{1,\lambda}(dx)}.$$

Et,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} (M_\alpha f_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_*^{1,\lambda}(H^\delta)} &\leq C\frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|M_\alpha f_i\|_{L^{1,\lambda}(dx)} \\ &\leq C\frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L^{1,\lambda}(dx)}. \end{aligned}$$

Il est clair que, pour $\lambda = 0$, on obtient l'inégalité (2).

References

[1] Adams, D.R., *A note on Choquet integrals with respect to Hausdorff capacity*, in "Functions spaces and Applications", Lund 1986, Lecture Notes in Math., 1302, Springer–Verlag, 1988, 115-184.

[2] Adams, D.R., *Choquet integrals in potential theory*, Publ. Mat., 42 (1998), no. 1, 3-66.

[3] Cruz-Uribe, D., *New proofs of two-weight norm inequalities for maximal operator*, Georgian Math. J., 7 (2000), no. 1, 33-42.

[4] Garcia Guerva, J. and Rubio de Francia, J.L., *Weighted norm inequalities and related topics*, Mathematics Studies, 116, North Holland, Amsterdam, 1985.

[5] Kuznetsov, E.A., *Maximal theorem and Calderón–Zygmund type decompositions for the fractional maximal function*, Doctoral Thesis, May 2005, Department of Mathematic Luleå; University of Technology SE–97187 Luleå; Sweden.

[6] Orobitg, J. and Verdera, J., *Choquet integrals, Hausdorff content and the Hardy-Littlewood maximal operator*, Bull. London Math. Soc., 30 (1998), no. 2, 145-150.

Accepted: 09.04.2009